9 INTEGRÁLNÍ POČET

9. 1 Primitivní funkce. Neurčitý integrál

Definice. Jestliže pro funkce $F(x)$ a $f(x)$ definované na otevřeném intervalu **I** platí

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro každé } x \in \mathbf{I},$$

říkáme, že funkce $F(x)$ je primitivní k funkci $f(x)$ na **I**.

Věta. Je–li $f(x)$ spojitá na **I**, pak k ní existuje na **I** funkce primitivní.

Je-li $F(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na **I** a C libovolné číslo, pak

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x),$$

takže i každá funkce $F(x) + C$ je na **I** k funkci $f(x)$ primitivní.

Definice. Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na **I** nazýváme neurčitý integrál funkce f(x).

Píšeme $$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$\int \quad dx$ …. Integrační znak, $f(x)$…. integrand, C….. integrační konstanta.

Př. $\int x \sin x \, dx$, $\int (x + \sin x)\, dx$

Je-li integrand ve tvaru součtu, píšeme v integračním znaku závorku.

Nalezení primitivní funkce nazýváme integrování. Je to opak derivování. Není to však tak jednoduché, protože neznáme obecně platné vzorce pro integraci součinu a podílu a pro integraci složené funkce.

Integrování provádíme pomocí vzorců V 1 - V 15 a pravidel P1 a P 2.

P 1 $$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

P 2 $$\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

1. $\int 0dx = c$

2. $\int 1dx = x + c$

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

6. $\int \cos x dx = \sin x + c$

7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -cotg\, x + c$

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + c$

9. $\int e^x dx = e^x + c$

10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

11. $\int \frac{1}{A^2 + x^2} dx = \frac{1}{A} arctg\, \frac{x}{A} + c$ $\quad \int \frac{1}{A^2 - x^2} dx = \frac{1}{2A} \ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + c$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{A} + c$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm B}\right| + c$

14. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

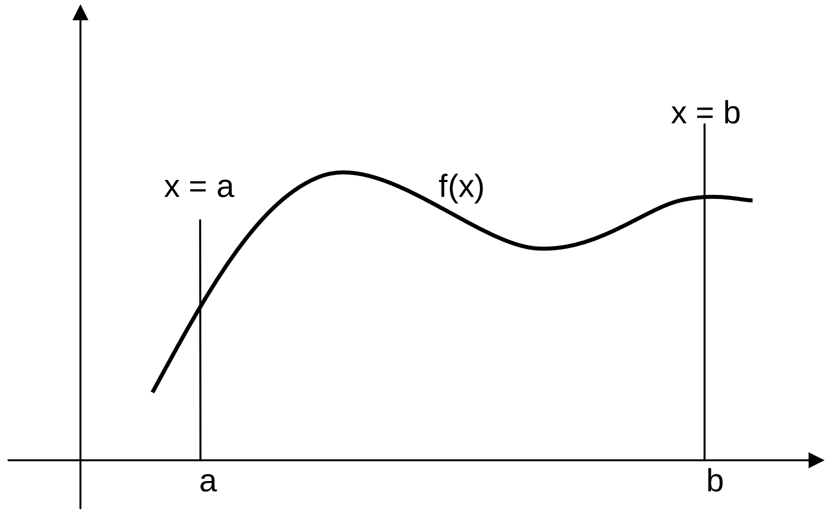
15. $\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$

9. 2 Určitý integrál

Definice. Nechť funkce *f(x)* je spojitá a nezáporná (tj. *f(x)* ≥ 0) na intervalu $\langle a, b \rangle$. Určitý integrál funkce *f(x)* od *a* do *b* je číslo, které vyjadřuje obsah plochy omezené křivkou *y = f(x)* osou *x* a přímkami *x = a, x = b*.

Značíme ho $\int_a^b f(x)dx$.

a je dolní integrační mez, *b* je horní integrační mez.



Výpočet určitého integrálu provádíme pomocí Newton-Leibnizova vzorce

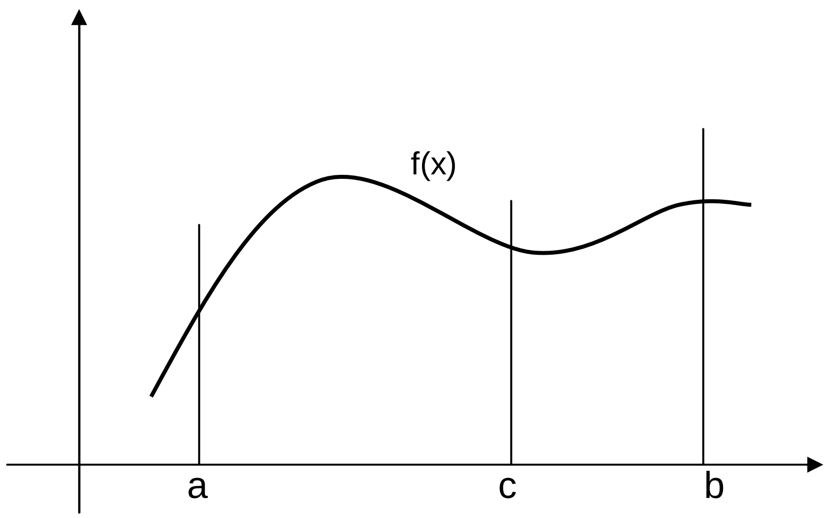
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

kde *F(x)* je funkce primitivní k funkci *f(x)* na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Př. $$\int_0^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{9}{2} - 0 = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Z Newton-Leibnizova vzorce vyplývají následující vlastnosti určitého integrálu:

- $$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
- $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$
- $$\int_a^a f(x)dx = 0$$
- $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
- $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \cdots \quad c \in \langle a,b \rangle$$



9. 3 Geometrické aplikace určitého integrálu

1. Obsah rovinné plochy

a) Ohraničené křivkou y = f(x) a osou x

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

b) Ohraničené dvěma křivkami y = f(x) a y = g(x).

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Integrační meze a, b jsou rovny x-ovým souřadnicím průsečíků daných křivek. Určíme je jako řešení soustavy rovnic

y = f(x)

y = g(x)

2. Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy x.

a) Rotací plochy ohraničené křivkou y = f(x) a osou x.

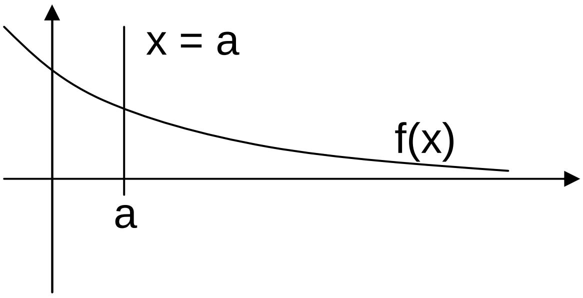
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

b) Rotací plochy ohraničené dvěma křivkami y = f(x) a y = g(x).

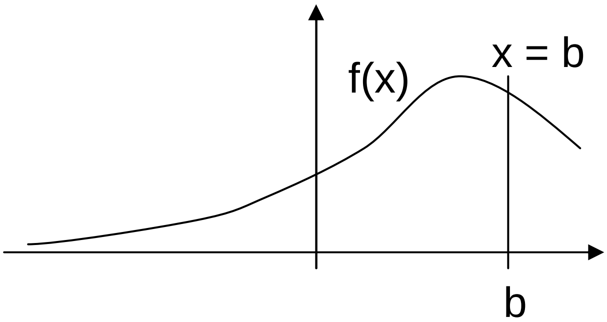
$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx$$

9. 4 Nevlastní integrál

Pojem určitého integrálu rozšiřujeme i na případy, kdy integrační interval není omezený. V těchto případech mluvíme o nevlastních integrálech. Definujeme je jako limity určitých integrálu s proměnnou mezí.



$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$



$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

Poznámka. Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ musíme rozdělit na dva integrály.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx \quad \cdots \quad c \in R$$

9. 5 Integrační metody

1. Úprava integrandu – pomocí algebraických a goniometrických vzorců
   – rozkladem na parciální zlomky

2. Metoda per partes $\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$

$$\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx$$

3. Metoda substituční