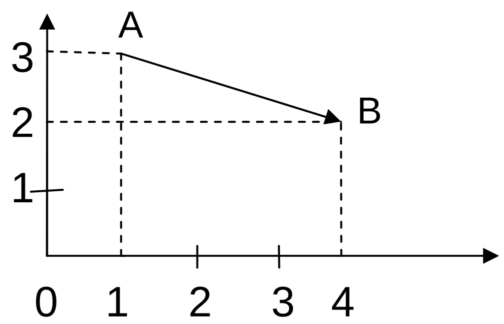
5 ČÍSELNÉ VEKTORY

5. 1 Vektory a operace s nimi

Vektor je veličina, která má velikost a směr, znázorňujeme ho orientovanou úsečkou.



Jsou-li dány souřadnice bodů A a B, např., je-li

A = [1, 3] B = [4, 2],

je $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,-1)$

Vektor $\vec{v}$ pak můžeme vyjádřit jako uspořádanou dvojici čísel (3, -1).

Definice. Uspořádanou n-tici čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ nazveme číselným vektorem dimenze n.
Píšeme $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

Čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se nazývají souřadnice (složky) vektoru.

Vektor, jehož všechny složky se rovnají nule, se nazývá nulový vektor

$$\vec{o} = (0, 0, 0, \ldots., 0).$$

Nechť jsou dány vektory
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$$
téže dimenze n a reálné číslo α.

Potom definujeme:

1. $\vec{a} = \vec{b}$ jestliže $a_i = b_i$, i = 1, 2, …., n
2. $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3, \dots, a_n \pm b_n)$
3. $\alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \dots, \alpha a_n)$
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n \leftrightarrow$ skalární součin

Př. $\vec{a} = (-0{,}5;\ 0;\ 2)$, $\vec{b} = (-4;\ -1;\ 0{,}3)$

Vypočtěte 1. $\vec{v} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$.

2. $\vec{a} \cdot \vec{b}$

3. vektor $\vec{x}$, když $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{b}$

Řešení. 1. $\vec{v} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$ = (-1; 0; 4) – (-20; -5; 1,5) = (19; 5; 2,5)

2. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = -0,5·(-4) + 0·(-1) + 2·0,3 = 2+0+0,6 = 2,6

3. $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{b}$ /· 2

$$2\vec{a} + \vec{x} = 2\vec{b}$$

$$\vec{x} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$$

$\vec{x}$ = (-8 + 1; -2 – 0; 0,6 – 4) = (-7; -2; -3,4)

Cvičení. *Černá. Matematika-lineární algebra.*
str. 13, Cvičení 2.1, př. 1 – 3.

Operace ♥ se nazývá:

komutativní, jestliže a ♥ b = b ♥ a

asociativní, jestliže a ♥ (b ♥ c) = (a ♥ b) ♥ c

Př. 2 + 3 = 3 + 2 + je komutativní

2 – 3 ≠ 3 – 2 - není komutativní

2 · 3 = 3 · 2 · je komutativní

2 + (3 + 5) = (2 + 3) + 5 + je asociativní

5. 2 Lineární závislost a nezávislost vektorů

Nechť jsou dány

vektory $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$ a reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ... \alpha_n$.

Říkáme, že:

1. Vektor $\vec{v} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$ je lineární kombinací vektorů $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$.
2. Vektory $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$ jsou lineárně nezávislé, právě když nemůžeme žádný z nich vyjádřit jako lineární kombinací ostatních.
3. Vektory $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$ jsou lineárně závislé, právě když můžeme alespoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinací ostatních.

Množina všech možných vektorů dimenze n se nazývá vektorový prostor dimenze n.

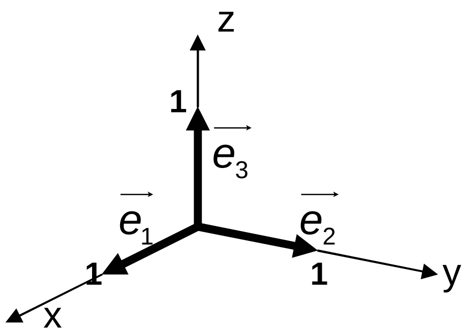
Mezi vektory dimenze n existuje maximálně n lineárně nezávislých vektorů:

$$\left.\begin{array}{l} \text{- ve vektorovém prostoru dimenze } n \text{ je to právě } n \text{ vektorů,} \\ \text{- mezi vektory } \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_i} \text{ je to } h \text{ vektorů, } h \leq n. \end{array}\right\} \leftrightarrow$$

$\leftrightarrow$ Každá početnější skupina vektorů jsou vektory lineárně závislé.

Př. Ve vektorovém prostoru dimenze 3 jsou lineárně nezávislé například vektory

$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$
$\overrightarrow{e_2} = (0,1,0)$
$\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$



Pro libovolný jiný vektor, např. $\vec{a} = (2,-3,0)$ pak platí, že

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$