4. UŽITÍ DERIVACÍ

4. 1. Monotonnost funkce. Lokální extrémy

Věta. Nechť funkce $y = f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $<a, b>$ a má v každém jeho vnitřním bodě derivaci, pak platí:

1. Funkce $y = f(x)$ je konstantní na $<a, b>$, právě když
   $f'(x) = 0$ pro každé $x \in (a, b)$.
2. Funkce $y = f(x)$ je rostoucí na $<a, b>$, právě když
   $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$.
3. Funkce $y = f(x)$ je klesající na $<a, b>$, právě když
   $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$.

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 (v němž je definována):

lokální maximum, jestliže pro každé x z ryzího okolí bodu x_0 platí $f(x) < f(x_0)$,

lokální minimum, jestliže pro každé x z ryzího okolí bodu x_0 platí $f(x) > f(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Lokální maximum}\\ \text{Lokální minimum}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{Lokální extrémy}$$

Je-li $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f'(x_0) > 0 \quad \Rightarrow$ f(x) je v bodě x_0 rostoucí

NEBO $\qquad \Rightarrow$

$f'(x_0) < 0 \quad \Rightarrow$ f(x) je v bodě x_0 klesající

$\Rightarrow$ f(x) nemá v bodě x_0 lokální extrém.

Funkce y = f(x) muže mít tedy lokální extrém v takovém bodě

x_0, kde $\quad f'(x_0) = 0 \quad$ …… stacionární body

$f'(x_0)$ neexistuje $\Leftrightarrow f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$

derivace zleva $\neq$ derivace zprava

vlastní derivace	nevlastní derivace
úhlové body	body vratu

Kriterium 1. Nechť f(x) je v bodě x_0 spojitá a nechť $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje. Existuje-li pravé ryzí okolí bodu x_0 tak, že funkce $f'(x)$ v něm má jiné znaménko než v levém ryzím okolí bodu x_0, má funkce f(x) v bodě x_0 lokální extrém.

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu <a, b> nabývá v něm své největší a nejmenší hodnoty …. tzv. absolutní extrémy.

Absolutní extrém tedy nastane buď v bodě lokálního extrému nebo v krajním bodě intervalu.

4. 2 Konvexnost, konkávnost. Inflexní body

Nechť funkce $y = f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $<a, b>$ a má v každém jeho vnitřním bodě derivaci, pak:

1. Funkce $y = f(x)$ je konvexní neboli nad tečnou v (a, b), právě

   když $\qquad f''(x) > 0 \qquad$ pro každé $x \in (a, b)$.

2. Funkce $y = f(x)$ je konkávní neboli pod tečnou v (a, b), právě

   když $\qquad f''(x) < 0 \qquad$ pro každé $x \in (a, b)$.

Bod, ve kterém existuje ke grafu funkce právě jedna tečna a v němž přechází graf funkce z konvexity do konkávity, tj. z jedné strany tečny na druhou se nazývá inflexní bod.

Je-li $f''(x_0) \neq 0 \;\Rightarrow\; f''(x_0) > 0 \;\Rightarrow\;$ f(x) je v bodě x_0 konvexní

NEBO $\qquad \Rightarrow$

$f''(x_0) < 0 \;\Rightarrow\;$ f(x) je v bodě x_0 konkávní

$\Rightarrow$ f(x) nemá v bodě x_0 inflexní bod.

Funkce $y = f(x)$ muže mít tedy inflexní bod v takovém bodě x_0, kde $f''(x_0) = 0$ nebo kde $f''(x_0)$ neexistuje.

Kriterium 2. Nechť funkce f(x) má v bodě x_0 spojitou první derivaci a nechť $f''(x_0) = 0$ nebo $f''(x_0)$ neexistuje. Existuje-li pravé ryzí okolí bodu x_0 tak, že funkce $f''(x)$ v něm má jiné znaménko než v levém ryzím okolí bodu x_0, má funkce f(x) v bodě x_0 inflexní bod.

Kriterium 3. Nechť

$$f^{/}(x_0) = f^{//}(x_0) = f^{///}(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$
$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Je-li $n \geq 1$ sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, má f(x) v bodě x_0 lokální min.

$f^{(n)}(x_0) < 0$, má f(x) v bodě x_0 lokální max.

Je-li $n \geq 2$ liché, má f(x) v bodě x_0 inflexní bod.