2 DERIVACE FUNKCE

2. 1 Definice a geometrický význam.

Přímka ***p*** určená bodem ***A*[*x*₀, *y*₀]** a směrnicí ***k*** má rovnici

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0).$$

Na grafu funkce $y = f(x)$ zvolme dva různé body A, B.

$A[x_0, f(x_0)]$ $\quad$ $B[x_0+h, f(x_0+h)]$, $\quad$ $h \in \mathbf{R}$.

Sečna AB má směrnici

$$k_{AB} = tg\varphi = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Budeme-li se přibližovat bodem B k bodu A, $B \to A$, tj. h se bude blížit k nule, $h \to 0$, bude sečna AB postupně přecházet v tečnu t_A v bodě A se směrnicí k_t.

Matematický zápis tohoto procesu je

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = k_t$$

Definice. Limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

nazýváme (pokud existuje) derivací funkce f(x) v bodě x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

Tečna v bodě $A[x_0, f(x_0)]$ má tedy rovnici

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Má-li funkce $y = f(x)$ derivaci ve všech bodech množiny M (např. intervalu (a, b)), je tato derivace funkcí definovanou na množině M (ke každému bodu je přiřazena jeho derivace) a značíme ji

$$f', \quad f'(x), \quad y' \qquad \text{nebo} \qquad \frac{df}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}.$$

2. 2 Pravidla pro derivování

Při praktickém počítání neurčujeme derivace funkcí užitím definice, tj. jako limitu, ale pomocí vzorců a pravidel, které jsou z definice odvozeny.

P 1 $\quad (k \cdot u)' = k \cdot u'$ $\quad$ k je konstanta

P 2 $\quad (u \pm v)' = u' \pm v'$ $\quad$ u, v jsou funkce v proměnné x

P 3 $\quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

P 4 $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

V 1 $\quad k' = 0$

V 2 $\quad (x^n)' = n\,x^{n-1}$

V 3 $\quad (e^x)' = e^x$

V 4 $\quad (a^x)' = a^x \ln a$

V 5 $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

V 6 $\quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

V 7 $\quad (\sin x)' = \cos x$

V 8 $\quad (\cos x)' = -\sin x$

V 9 $\quad (\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

V 10 $\quad (\mathrm{cotg}\, x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

V 11 $\quad (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

V 12 $\quad (\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

V 13 $\quad (\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

V 14 $\quad (\mathrm{arccotg}\, x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

2. 3 Derivace složené funkce

$$y = F(x) = f(\varphi(x))$$

je rovna součinu derivací jejich jednotlivých složek, tj.

$y' = f' \cdot \varphi'$ přesněji $y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Podobně pro funkci $y = F(x) = f(g(\varphi(x)))$

je $y' = f' \cdot g' \cdot \varphi'$

přesněji $y' = f'(g(\varphi(x))) \cdot g'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

2. 4 Derivace vyššího řádu

Derivací 2. řádu neboli druhou derivací funkce $y = f(x)$ nazýváme funkci $(f')'$,

tj. derivaci první derivace funkce *f*. Značíme ji $f''(x)$.

Podobně $f'''(x) = [f''(x)]'$

Obecně $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$

2. 5 l'Hospitalovo pravidlo

Je-li $\frac{f(x)}{g(x)}$ neurčitým výrazem $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ a existuje-li

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje také $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Neurčité výrazy $\|0 \cdot \infty\|$, $\|\infty - \infty\|$, $\|0^0\|$, $\|\infty^0\|$ a $\|1^\infty\|$ lze upravit na tvar $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ a použít l´Hospitalovo pravidlo.