# 1 LIMITA FUNKCE

## 1. 1 Definice funkce

Pravidlo ***f***, které každému ***x*** z množiny ***D*** přiřazuje právě jedno ***y*** z množiny ***H*** se nazývá funkce proměnné ***x***.

**Píšeme**

$$y = f(x)$$

**Někdy používáme i jiná písmena**

**argument (nezávisle proměnná)** …….$t, u, v, \ldots$

**funkční předpis** …….$g, h, \varphi, \psi \ldots$

**funkční hodnota (závisle proměnná)** ………$u, w, z, \ldots$

**Píšeme pak např.**

$$y = \varphi(x), \quad z = h(t), \ldots$$

Množina *D* se nazývá definiční obor funkce *f* (přesnější označení $D_f$, resp. $D(f)$ ).

Množina *H* se nazývá obor hodnot funkce *f* (přesnější označení $H_f$, resp. $H(f)$ ).

**Poznámka.**

1. U konkrétních funkcí užíváme pro funkční předpis místo písmene *f* různé smluvené znaky, např. *sin, cos, log,* √, …

   Píšeme pak $y = \sin x$, $y = \log(x+1)$, …

2. Zápis funkce vždy musí obsahovat argument a funkční předpis.

„$y = sin$“ to není nic.

3. Závorku kolem argumentu u jednoduchých funkcí vynecháváme.

Místo $y = sin(x)$ píšeme pouze $y = sin\ x$.

Avšak pozor

$$y = \log x + 1 = 1 + \log x \neq \log (x+1).$$

Je-li „předpis“, který každému argumentu přiřazuje právě jednu funkční hodnotu ve tvaru

„$y$ = vzorec pro $x$“, říkáme, že funkce je zadána explicitně.

Např. $y = \log\sqrt{1+x^2}$ .

Je-li tento předpis ve tvaru „vzorec pro $x$ a $y$ = 0“, mluvíme o implicitním zadání.

Např. $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ resp. $x^2 + y^2 = r^2$

$y - \sin xy = 0$ resp. $y = \sin xy$

Grafem funkce $y = f(x)$ je množina všech bodů v rovině o souřadnicích $[x, f(x)]$.

Z definice funkce [Pravidlo, které každému ***x*** přiřazuje právě jedno ***y*** se nazývá funkce.] plyne, že rovnoběžka s osou y protíná graf funkce nejvýše v jednom bodě.

Jestliže definičním oborem $D_f$ jsou reálná čísla jednoho nebo několika intervalů, je grafem funkce jeden nebo několik oblouků souvislé křivky. Tvoří-li definiční obor pouze jednotlivá čísla (např. přirozená), pak se graf skládá pouze z jednotlivých bodů. Funkční závislost (předpis) pak bývá dána pouze tabulkou.

## 1. 1. 1 Vlastnosti funkcí

A. Funkce monotónní

Funkce $f(x)$ je na množině **M:**

a) rostoucí, jestliže pro každé $x_1 < x_2$ z M
je $f(x_1) < f(x_2)$

b) klesající, jestliže pro každé $x_1 < x_2$ z **M**
je $f(x_1) > f(x_2)$

c) neklesající, jestliže pro každé $x_1 < x_2$ z M
je $f(x_1) \leq f(x_2)$

d) nerostoucí, jestliže pro každé $x_1 < x_2$ z M
je $f(x_1) \geq f(x_2)$

B. Funkce prostá

Funkce f(x) se nazývá prostá na množině **M**, jestliže pro každé $x_1 \neq x_2$ z M je $f(x_1) \neq f(x_2)$

Graf prosté funkce protíná rovnoběžka s osou x nejvýše v jednom bodě.

Věta. Je-li funkce na množině **M** rostoucí nebo klesající, pak je zde prostá.

C. Funkce sudá a lichá

Funkce $f(x)$ se nazývá sudá, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí

$$f(-x) = f(x).$$

Funkce $f(x)$ se nazývá lichá, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí

$$f(-x) = -f(x).$$

Graf sudé funkce je souměrný podle osy *y*, graf liché funkce podle počátku [0,0].

D. Funkce ohraničená

Funkce f(x) je na množině M **ohraničená zdola**, jestliže existuje číslo d takové, že pro každé
$x \in M$ je $f(x) \geq d$

Funkce f(x) je na množině M **ohraničená shora**, jestliže existuje číslo h takové, že pro každé
$x \in M$ je $f(x) \leq h$

E. Funkce periodická

Nechť definiční obor funkce f(x) obsahuje s každým bodem x také bod x + *k*p, kde $k \in \mathbf{Z}$, p>0. Funkce f(x) se nazývá periodická, jestliže platí f(x + kp) = f(x).

### 1. 1. 2 Elementární funkce

Elementární funkce jsou:

Mocninná funkce $y = x^n$, $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbf{N}$

Exponenciální funkce $y = a^x$

Logaritmická funkce $y = \log_a x$

Goniometrická funkce $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$ , $y = \mathrm{cotg}\, x$

Cyklometrické funkce

y = arcsin x, y = arccos x, y = arctg x, y = arccotg x.

## 1. 1. 3 Funkce inverzní a složená

### A. Funkce inverzní

Definice. Nechť $f$ je prostá funkce. Funkci $f^{-1}$, která každému $y \in H_f$ přiřazuje právě to $x \in D_f$, pro které platí $y=f(x)$, nazýváme funkce inverzní k funkci $f$.

Tedy $x = f^{-1}(y)$.

Protože však nezávisle proměnnou kreslíme na vodorovnou osu a značíme $x$ a závisle proměnnou na svislou osu a značíme $y$, zaměníme formálně $x$ za $y$.

Dostaneme $y = f^{-1}(x)$, což je explicitní tvar funkce inverzní k funkci $y = f(x)$.

Grafy vzájemně inverzních funkcí $f$ a $f^{-1}$ jsou shodné křivky a jsou souměrné podle osy 1. kvadrantu, tj. podle přímky $y = x$.

U základních elementárních funkcí, je zpravidla inverzní funkcí jiná elementární funkce.

| Např. | $y = f(x)$ | | $y = f^{-1}(x)$ |
|---|---|---|---|
| | $y = \sqrt{x}$ | $\leftrightarrow$ | $y = x^2$, $x > 0$ |
| | $y = e^x$ | $\leftrightarrow$ | $y = \ln x$ |
| | $y = \log_a x$ | $\leftrightarrow$ | $y = a^x$ |
| | $y = \sin x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ | $\leftrightarrow$ | $y = \arcsin x$ |

### B. Funkce složená

Funkce můžeme skládat. Dosazením libovolné elementární funkce za argument jiné vzniká funkce složená.

Funkce $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$

je složením funkcí $y = x^2$ a $y = \sin x$

$(\ )^2$ $\quad$ $\sin$

$f$ $\quad$ $\varphi$

Tedy $y = f(\varphi(x))$

Funkce

$y = \log \cos^2 2x = \log([\cos(2x)]^2) = \log(\cos^2(2x)) = \log(\cos^2 2x)$

je složením funkcí $y = \log x$, $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = 2x$

$f$ $\quad$ $g$ $\quad$ $\varphi$ $\quad$ $\psi$

Takže $y = f(g(\varphi(\psi(x))))$

## 1. 2 Limita funkce

Funkce $y = \dfrac{\sin x}{x}$ není definovaná v bodě nula. Budeme-li dosazovat za x hodnoty blízké 0, zjistíme, že funkční hodnoty „se velmi málo liší“ od 1.

Fakt, že pro $x$ ležící v okolí bodu $x_0$ se $f(x)$ „velmi málo liší“ od čísla $L$ vyjádříme slovy funkce $y = f(x)$ má v bodě $x_0$ limitu $L$

a zapíšeme symbolicky $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

V našem případě $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

**Okolím bodu $x_0$** rozumíme interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ……… tzv. $\delta$ - okolí bodu $x_0$. Označíme ho $O(x_0)$.

$x \in O(x_0)$ znamená, že $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

neboli

$$|x - x_0| < \delta$$

tj. vzdálenost bodů $x$, $x_0$ je menší než $\delta$.

Interval $(x_0, x_0 + \delta)$ se nazývá **pravé** okolí bodu $x_0$ …. $O^+(x_0)$.

Interval $(x_0 - \delta, x_0)$ se nazývá **levé** okolí bodu $x_0$ …… $O^-(x_0)$.

Vyloučíme-li z $O(x_0)$ bod $x_0$, je $0 < |x - x_0| < \delta$.

Vzdálenost bodů $x$, $x_0$ je menší než $\delta$, ale není 0, tj. $x \neq x_0$. Hovoříme o **ryzím okolí** bodu $x_0$.

**Definice.** Funkce $y = f(x)$ má v bodě $x_0$ limitu $L$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x$ z ryzího okolí bodu $x_0$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$

Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Tedy ke každému $O(L)$ existuje ryzí $O(x_0)$ tak, že pro každé $x$ z tohoto ryzího okolí je $f(x) \in O(L)$.

Použijeme-li v definici pouze pravé okolí resp. levé okolí, dostaneme:

definici limity zprava

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

resp.
definici limity zleva

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Věta. Funkce má v bodě $x_0$ limitu $L$, právě když

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

Věta. Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Aby existovala limita funkce $f(x)$ v bodě $x_0$, nemusí být funkce v tomto bodě definovaná. Musí však být definovaná v nějakém ryzím okolí tohoto bodu (případně v pravém nebo v levém ryzím okolí). Takže např. výrazy

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{1-2x} \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to 0^-} \ln x$$

nemají smysl.

## 1. 3 Rozšířená množina reálných čísel

Rozšířená množina reálných čísel $\mathbf{R}^*$ je množina reálných čísel $\mathbf{R}$ rozšířená o prvky $\pm\infty$ ……….. $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Přitom pro lib. $a \in \boldsymbol{R}$ platí:

$a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$, $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$,

$\infty \cdot \infty = -\infty \cdot (-\infty) = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$, $\dfrac{a}{\infty} = \dfrac{a}{-\infty} = 0$,

$-\infty < a < \infty$, $|\pm\infty| = \infty$.

Pro $a > 0$ platí: $a \cdot \infty = \infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$.

Pro $a < 0$ platí: $a \cdot \infty = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$.

Prvky $-\infty, +\infty$ nazýváme nevlastní body množiny $\mathbf{R}^*$, ostatní prvky se nazývají vlastní.

Poznámka. Nejsou definovány operace

$$\left\| \infty - \infty \right\| , \quad \left\| \pm \infty \cdot 0 \right\| , \text{ dělení nulou }, \quad \left\| \frac{\pm \infty}{\pm \infty} \right\| .$$

## 1. 4 Výpočet limity

Výpočet limity $\lim_{x \to x_0} f(x)$ provádíme dosazením $x = x_0$ do $f(x)$.

U elementárních funkcí je v bodech, které patří do definičního oboru, limita a funkční hodnota stejná. Zajímavý je tedy pouze výpočet limity v bodech, které do definičního oboru nepatří.

Pravidla pro počítání s limitami…… skripta str. 35.

Limita polynomu a racionální funkce v nevlastních bodech:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) = \lim_{x \to \pm\infty} a_0 x^n$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$$

## 1. 5 Nevlastní limita

Definice. V případě, že v okolí bodu $x_0$ roste $f(x)$ nade všechny meze (tj., když ke každému $M > 0$ existuje ryzí okolí bodu $x_0$, tak, že pro každé $x$ z tohoto okolí je $f(x) > M$), říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ nevlastní limitu $+\infty$.

Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Podobně definujeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ a nevlastní limity zprava a zleva.

Výpočet nevlastní limity.

Při výpočtu nevlastní limity dostaneme po dosazení $x = x_0$ do $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ výraz typu $\left\| \dfrac{k}{0} \right\|$.

Je-li v okolí bodu $x_0$ podíl $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ , je $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left\| \dfrac{k}{0} \right\| = +\infty$

Je-li v okolí bodu $x_0$ podíl $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ , je $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left\| \dfrac{k}{0} \right\| = -\infty$

Přitom je třeba zkoumat zvlášť levé a zvlášť pravé okolí bodu $x_0$.